

Теория

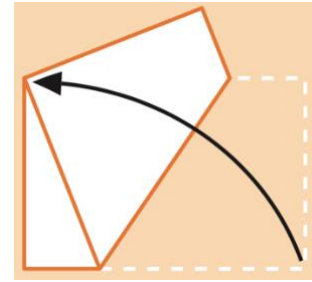
1. Точка, прямая, плоскость. Аксиомы прямой. Свойства прямой.
2. Отрезок, луч. Аксиомы отрезков.
3. Полуплоскость. Аксиома полуплоскостей.
4. Угол. Аксиомы углов. Вертикальные углы. Теорема о вертикальных углах.
5. Ломаная, многоугольник. Элементы треугольника: медиана, биссектриса и высота.
6. Выпуклые фигуры. Свойства выпуклых многоугольников.
7. Признак равенства многоугольников. Признаки равенства треугольников.
8. Осевая симметрия. Свойство осевой симметрии.
9. Равнобедренный треугольник. Свойства равнобедренного треугольника. Признаки равнобедренного треугольника.
10. Параллельные прямые. Признаки параллельности прямых. Свойства параллельных прямых.
11. Сумма углов треугольника. Теорема о внешнем угле треугольника. Теорема о сумме углов многоугольника. Теорема о сумме внешних углов многоугольника.
12. Прямоугольный треугольник. Признаки равенства прямоугольных треугольников. Свойство медианы прямоугольного треугольника. Прямоугольный треугольник с углов 30° .
13. (*) Большая сторона и больший угол треугольника. Теорема о перпендикуляре и наклонной.
14. (*) Неравенство треугольника. Неравенство ломаной. Неравенство периметров двух треугольников. Неравенство резинки.
15. Окружность. Круг. Серединный перпендикуляр.

Задачи

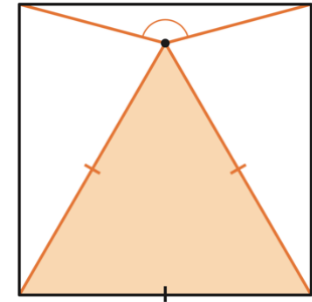
1. (А) На плоскости отметили 10 точек, причём никакие три из них не лежат на одной прямой. Через каждую пару этих точек провели прямую. Докажите, что при этом получится ровно 45 прямых.
2. (А) На плоскости отметили четыре точки. Через каждые две из них провели прямую. Сколько всего при этом могло получиться прямых?
3. (А) На плоскости провели 10 прямых. В каком наибольшем числе точек могут пересекать друг друга эти прямые?
4. (А) Про точки A , B и C известно, что $AB = 2$ см, $BC = 3$ см, $AC = 4$ см. Могут ли эти точки лежать на одной прямой?
5. (А) Точки A , B и C лежат на одной прямой. Известно, что $AC : BC = 1 : 3$, $AB = 12$ м. Чему может быть равна длина отрезка AC ? Разберите все случаи.

6. (Б) Геометрически поясните, почему должно быть верно неравенство $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \dots + \frac{1}{1024} < 1$.
7. (Б) Десять точек на плоскости попарно соединили отрезками. Прямая линия не проходит ни через одну из этих точек. а) Может ли она пересекать ровно 21 из этих отрезков? б) Может ли она пересекать ровно 20 из этих отрезков?
8. (А) Докажите, что биссектрисы вертикальных углов лежат на одной прямой.
9. (А) Один из двух смежных углов на 30° больше другого. Найдите величину меньшего из этих углов.
10. (А) Прямая проходит через вершину прямого угла. Его стороны образуют с ней два острых угла. Чему может быть равен угол между биссектрисами двух этих острых углов?
11. Найдите угол между часовой и минутной стрелками:
 - а) в 9 часов 30 минут; (А)
 - б) в 10 часов 40 минут; (А)
 - в) в 11 часов 35 минут. (Б)
12. (А) Сколько всего диагоналей у двадцатиугольника?
13. (Б) У многоугольника всего 20 диагоналей. Сколько у него сторон?
14. (Б) Разрежьте пятиконечную звезду на пять выпуклых фигур.
15. (А) Диагональ BD четырехугольника $ABCD$ образует равные углы с его сторонами AB и CD . Известно, что $AB = CD$. Докажите, что $BC = AD$.
16. (Б) В четырёхугольнике $ABCD$ диагональ AC делит углы BAD и BCD пополам. Докажите, что его диагонали перпендикулярны.
17. (Б) Внутри прямого угла взяли любую точку M . Её отразили симметрично относительно сторон этого угла и получили точки M_1 и M_2 . Докажите, что вершина угла лежит на середине отрезка M_1M_2 .
18. (Б) В четырёхугольнике $ABCD$ стороны AB и CD равны. Его диагонали тоже равны и пересекаются в точке O . Докажите, что $AO = DO$.
19. (А) Прямая пересекает две параллельные в точках A и B . Биссектрисы двух смежных углов с вершиной в точке B при одной из этих прямых пересекают другую параллельную прямую в точках C и E . Докажите, что $AC = AE$.
20. (А) В пятиугольнике $ABCDE$ стороны AB и DE параллельны, а углы ABC и CDE равны 100° и 120° соответственно. Найдите величину угла BCD .

21. (Б) Прямоугольный лист бумаги согнули так, что совместились его противоположные вершины. Докажите, что линия сгиба перпендикулярна диагонали этого прямоугольника.
22. (А) Один угол шестиугольника прямой, а все другие равны между собой. Найдите величину этих углов.

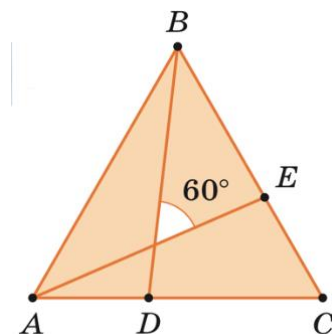


23. (Б) На стороне квадрата внутри него построили равносторонний треугольник. Найдите отмеченный на рисунке угол, под которым из вершины этого треугольника видна противоположная сторона квадрата.
24. (Б) Найдите сумму углов при вершинах любой пятиконечной звезды.



25. (Б) На боковых сторонах AB и BC равнобедренного треугольника ABC взяли точки M , K и E так, что $BK = KM = ME = EA = AC$. Найдите угол этого треугольника, лежащий против основания.

26. (Б) На сторонах равностороннего треугольника ABC взяли точки D и E так, что отмеченный на рисунке угол между отрезками AE и BD равен 60° . Докажите, что $AE = BD$.

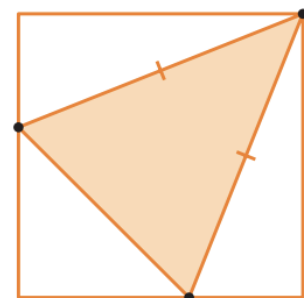


27. (Б) В треугольнике ABC провели биссектрису BE . Оказалось, что $BC + CE = AB$. Докажите, что один из углов этого треугольника в два раза больше другого.

28. (Б) Медиана треугольника образует со сторонами, выходящими из той же вершины, углы 70° и 40° . Докажите, что она равна половине одной из сторон этого треугольника.

29. (А) Две высоты треугольника равны. Докажите, что он равнобедренный.

30. (Б) В квадрат вписали равнобедренный треугольник так, как показано на рисунке. Докажите, что одна сторона этого треугольника параллельна диагонали квадрата.



31. (А) Найдите высоту дома, размеры которого показаны на рисунке, если угол между равными скатами его крыши равен 120° .
32. (Б) В четырёхугольнике $ABCD$ углы ABD и ACD прямые. Точки M и K — середины его сторон AD и BC соответственно. Докажите, что прямая MK перпендикулярна одной из сторон этого четырёхугольника.
33. (А*) Докажите, что угол треугольника, лежащий против самой его короткой стороны, не превосходит 60° .
34. (А*) На основании равнобедренного треугольника взяли произвольную точку. Докажите, что расстояние от этой точки до противоположной вершины не больше боковой стороны треугольника.
35. (А*) Длины двух сторон треугольника равны 2 и 5, а длина третьей — целое число. Чему может быть равно это число?
36. (Б*) Одна сторона треугольника равна 4 см, а длины двух других относятся как 3 : 5. Докажите, что периметр треугольника меньше 20 см.
37. (Б*) Внутри многоугольника взяли две любые точки A и B . Докажите, что отрезок AB всегда меньше половины периметра многоугольника.
38. (А) Дан отрезок AB . Закрасьте на плоскости множество всех таких точек M , что $AM \leq AB < BM$.
39. (А) Дан четырёхугольник $ABCD$. Сколько всего на плоскости существует таких точек M , что $AM = CM, BM = DM$?
40. (Б) Дан равносторонний треугольник ABC . Закрасьте внутри него все такие точки M , для которых выполняются неравенства $AM < BM < CM$.
41. (А) В окружности провели две параллельные хорды. Докажите, что у них есть общий серединный перпендикуляр.
42. (Б) Дана окружность и точка A , не лежащая на ней. Где на окружности находится такая точка B , для которой отрезок AB самый короткий.

