

«Математическая вертикаль»

2020/2021 уч. год

Ключевые задачи курса алгебры

Предисловие

Этот текст практически не отличается от аналогичного прошлогоднего. Исправлены некоторые опечатки и ошибки форматирования. Нумерация задач немного изменилась.

Замечания, вопросы, комментарии присылайте на почту vertical.algebra@179.ru.

Список используемых обозначений

- ☺ отмечает задачи-шутки.
- Λ отмечает задачи на логику.

Содержание

1	Повторение программы 5–6 класса. Логика	2
1.1	Основные задачи	2
1.2	Дополнительные задачи	3
2	Функции	4
3	Линейные уравнения и распределительный закон умножения	5
3.1	Основные задачи	5
3.2	Дополнительные задачи	5
4	Степень с натуральным показателем. Одночлены	6
4.1	Основные задачи	6
4.2	Дополнительные задачи	6
5	Многочлены	7
6	Формулы сокращённого умножения	8
6.1	Основные задачи	8
6.2	Дополнительные задачи	9
7	Линейная функция и её график	10
7.1	Основные задачи	10
7.2	Дополнительные задачи	10
8	Системы линейных уравнений	11
8.1	Основные задачи	11
8.2	Дополнительные задачи	11

1 Повторение программы 5–6 класса. Логика

1.1 Основные задачи

1 Вычислите наиболее удобным для вас способом:

а) $899 + 1343 + 101$;

в) $0,378 + 1,9 + 18,64 - 2,378 + 0,1 - 8,64$;

б) $\frac{15 \cdot 35 \cdot 63 \cdot 27}{9 \cdot 25 \cdot 49 \cdot 81}$;

г) $7 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$.

2 Найдите все делители данного числа и ответьте, сколько их:

а) 10; б) 11; в) 51; г) 53; д) 153; е) 81; ж) 1000; з*) 5400.

3 В картинной галерее $\frac{2}{5}$ всех картин составляют портреты, из них $\frac{1}{2}$ нарисована акварелью. Среди остальных картин доля написанных акварелью равна $\frac{5}{6}$.

а) Какую долю от всех картин составляют картины, написанные акварелью?

б) Сколько процентов от всех картин составляют картины, написанные акварелью?

в) Сколько всего картин в галерее, если ровно 1212 из них не являются портретами?

4 Проверьте, какие из следующих утверждений верны, а какие — нет. Опровергните неверные утверждения, а верные — постарайтесь доказать.

а) Сумма двух нецелых чисел — всегда нецелое число.

б) Сумма двух десятичных дробей, у каждой из которых один знак после запятой, не может иметь два знака после запятой.

в) Сумма двух десятичных дробей, у каждой из которых два знака после запятой, не может иметь только один знак после запятой.

г) Произведение двух десятичных дробей, у каждой из которых один знак после запятой, не может иметь один знак после запятой.

д) Сумма трёх несократимых дробей с различными знаменателями не может быть 1.

е) Сумма двух чётных чисел всегда чётна.

ж) Сумма чётного и нечётного числа всегда нечётна.

з) Некоторые чётные числа делятся на 2.

и) Все нечётные числа делятся на 3.

к) Некоторые нечётные числа делятся на 3.

л) Некоторые десятизначные числа имеют сумму цифр 5.

м) Все натуральные числа с суммой цифр 15 делятся на 15.

н) Все двузначные числа с суммой цифр 9 делятся на 9.

о) Все натуральные числа, делящиеся на 9, имеют сумму цифр 9.

п) Если сумма цифр натурального числа делится на 27, то и число делится на 27.

р) Если произведение двух натуральных чисел делится на 3, то хотя бы одно из чисел делится на 3.


с) Если произведение двух натуральных чисел делится на 4, то хотя бы одно из чисел делится на 4.

т) Если периметр одного квадрата больше периметра второго, то и площадь первого квадрата больше площади второго.

у) Если периметр одного прямоугольника больше периметра другого прямоугольника, то и площадь первого прямоугольника больше площади второго.

5 Расставьте стрелочки \Rightarrow , \Leftarrow , \Leftrightarrow между утверждениями про целое число N :

N делится на 2, N делится на 4, N оканчивается на 36, N делится на 6.

 6 Тигра умеет бегать со скоростью 60 км/ч и очень хочет научиться тратить на каждый километр на одну минуту меньше. С какой скоростью нужно научиться бегать Тигре, чтобы исполнить своё желание?

7 У Полины есть дисконтная карта её любимого магазина, которая даёт скидку 10% на все покупки. Ответьте:

- а) во сколько обойдётся Полине шарф стоимостью 800 р.;
- б) во сколько обойдётся Полине пальто стоимостью 9900 р.;
- в) сколько стоят сапоги, если Полина заплатила за них 9900 рублей;
- г) сколько стоят перчатки, если Полина заплатила за них 2178 рублей?

8 У Альбины есть дисконтная карта на скидку в её любимом магазине.

- а) Определите размер скидки, если за товар стоимостью 1200 рублей она заплатила 1020.
- б) Сколько стоил товар, если Альбина заплатила 1700 рублей?

9 На завтрак Карлсон съел 40% торта, а Малыш съел 150 г. На обед Фрекен Бок съела 30% того, что осталось, и ещё 120 г, а Матильда вылизала оставшиеся 90 г крошек от торта. Какой массы был торт изначально?

10 а) Известно, что шуба дороже пальто на 100%. На сколько процентов пальто дешевле шубы?

б) Куртка дороже пиджака на 60%. На сколько процентов пиджак дешевле куртки?

11 Агент предлагает вам УНИКАЛЬНУЮ ОПЦИЮ: уменьшить длину прямоугольного участка, который вы планировали купить, на 30% взамен на увеличение ширины на целых 40%. Цену обещает оставить неизменной. Выгодно ли предложение?

1.2 Дополнительные задачи

Д1 Расставьте стрелочки \Rightarrow , \Leftarrow , \Leftrightarrow между утверждениями про целое число N :

N делится на 24, N делится на 6 и на 4, N делится на 12, N делится на 9.

Д2 Есть два дома, в каждом по два подъезда. Жильцы держат кошек и собак. Доля кошек (отношение числа кошек к общему числу кошек и собак) в первом подъезде первого дома больше, чем доля кошек в первом подъезде второго дома, а доля кошек во втором подъезде первого дома больше, чем доля кошек во втором подъезде второго дома. Верно ли, что доля кошек в первом доме больше доли кошек во втором доме?

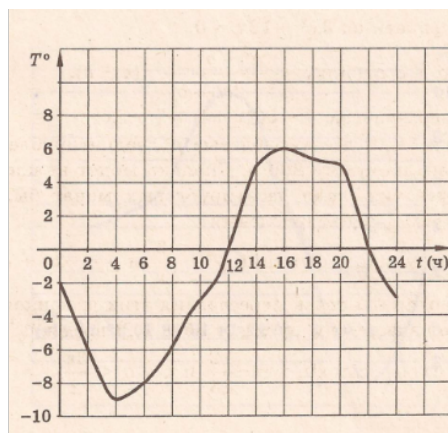
Д3 В пятизначном числе переставили местами некоторые цифры. Могло ли оно а) увеличиться на 1863; б) уменьшиться на 12345?

Д4 Делится ли число $11 \dots 11$ (81 единица) на 81?

2 Функции

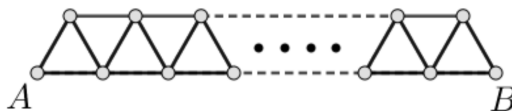
12 На графике показано изменение температуры воздуха в течение суток.

- а) Какая температура была в 6 часов?
- б) Когда температура была равна 0°C ? А -6°C ?
- в) Когда температура была положительной?
- г) Какова максимальная температура за сутки?
- д) Когда температура повышалась?
- е) Сколько часов температура не превышала -6°C ?



13 Какие из следующих описаний задают одну и ту же функцию?

- а) $f(x) = 2x - 1$, где x — натуральное.
- б) $y = 2x + 1$, где x — натуральное.
- в) Пусть дано натуральное число n . Выпиши по порядку нечётные числа (1, 3, 5, 7, ...) и найди число, которое стоит на n -м месте в этом ряду. Оно и будет искомым значением.
- г) Пусть дано некоторое натуральное число. Сначала вычти из него 1, а потом результат умножь на 2. Ответ будет искомым значением.
- д) Пусть дано некоторое натуральное число. Сначала умножь его на 2, потом вычти 1. Ответ будет искомым значением.
- е) Возьми клетчатый квадрат, сторона которого состоит из данного числа клеток, и вырежь из него квадрат со стороной на 1 клетку меньше. Число клеток в оставшейся фигуре будет искомым значением. Исключение: если дано число 1, просто возьми число клеток в квадрате со стороной 1 (то есть 1), ничего вырезать не нужно.
- ж) Для данного натурального числа x , нарисуй отрезок $AB = x$, построй на нём полоску из треугольников со стороной 1, как показано на рисунке, и посчитай число треугольников. Ответ будет искомым значением.



14 В этом задании речь идёт о функциях, определённых на всей числовой прямой. Выясните, какие из следующих утверждений верны, а какие — нет.

Не забудьте обосновать свой ответ!

- а) Функция $f(x) = 6(x - 1)$ не принимает значение 4,2.
- б) Функция $g(x) = 8(x - 1)(x - 2)$ принимает целые значения только при целых значениях аргумента.
- в) Множество значений функции $h(x) = x + 5$ — вся числовая прямая.
- г) Множество значений функции $C(x) = 7$ состоит из одного числа.
- д) Функция $q(x) = x(10 - x)$ не принимает значение 24.
- е) Функция $q(x) = x(10 - x)$ принимает каждое своё значение ровно 1 раз.
- ж) Значения одной и той же функции при разных значениях аргумента не могут быть одинаковыми.
- з) Значения разных функций при одном и том же значении аргумента не могут быть одинаковыми.
- и) Некоторые функции принимают только два значения.

3 Линейные уравнения и распределительный закон умножения

3.1 Основные задачи

15 Вычислите устно:

- | | |
|---------------------|--|
| а) $7 \cdot 999$; | д) $1234 \cdot 1234 - 1234 \cdot 234$; |
| б) $15 \cdot 994$; | е) $1287 \cdot 1287 + 1287 \cdot 8713$; |
| в) $16 \cdot 104$; | ж) $1999 \cdot 17 - 20 \cdot 16 + 20 \cdot 17 - 1999 \cdot 16$; |
| г) $16 \cdot 96$; | з) $1465 \cdot 38 + 222 \cdot 19 - 1465 \cdot 37 - 111 \cdot 37$. |

16 Алиса показывает фокус. Просит каждого зрителя задумать число, умножить его на 12, прибавить 2, умножить результат на 3, прибавить 3, разделить результат на 9 и дважды вычесть исходное задуманное число. После этого все желающие сообщают Алисе свой результат, и она отгадывает задуманное число. Что загадал зритель, получивший число 3? А зрители, получившие 201 и 4039? А хитрый зритель, получивший число 0,4? Как Алисе удаётся быстро и безошибочно отгадывать ответ?

17 Вчера ученик шёл от дома до школы со скоростью 3 км/ч и опоздал на урок на 1 мин. Сегодня он пошёл со скоростью 4 км/ч и пришёл за 3 мин до начала урока. С какой скоростью ученику нужно идти в следующий раз, чтобы прийти в точности к началу урока, если он выходит из дома каждый раз в одно и то же время?

18 Придумайте задачу, которую можно решить с помощью уравнения:

- а) $12x = 288$; б) $10x = 5$; в) $5(x - 3) = 2x$; г*) $8x - 8(x - 3) = 24$.

19 Какие из чисел а) 1; б) 0; в) 2; г) -5; д) 1,5; е) $-\frac{2}{3}$ являются корнями уравнения

$$(x - 1)(x + 5)(3x + 2)(2x + 3)(x + 1,3) = 0?$$

20 Какие из следующих уравнений равносильны уравнению $x - 2 = 3 - 2x$? Ответ объясните.

- а) $5(x - 2) = 5(3 - 2x)$; в) $10x - 2 = 3 - 20x$; д) $2 - x = 2x - 3$;
 б) $\frac{x - 2}{15} = \frac{3 - 2x}{15}$; г) $x(x - 2) = x(3 - 2x)$; е) $x - 2x = 3 - 2$.

21 Решите уравнения и, сделайте проверку подстановкой там, где это возможно:

- а) $6x = -3$; в) $4(5t - 2) - 2(5t + 2) - 10(t + 4) = 0$;
 б) $0,75(m + 8) - \frac{1}{12}m = \frac{2}{3}(m + 9)$; г) $\frac{y - 2}{6} - \frac{y + 10}{15} = \frac{y}{4} - 1$.

3.2 Дополнительные задачи

Д5 Для каждого пункта ответьте на следующие вопросы. Сколько слагаемых получится после раскрытия всех скобок, если никаких сложений и вычитаний не выполнять? Сколько из слагаемых будут с плюсом, сколько — с минусом? Чему равно значение выражения?

- а) $1 - (2 - (3 - (4 - \dots (99 - 100) \dots))$; б) $1 - 2(1 - 2(1 - 2(1 - 2(1 - 2(1 - 2(1 - 2))))))$;
 в) $(1000 + 8)(1000 - 8)$; г) $(1 + 2 + 3 + 4)(5 + 6)$; д) $(7 + 8 + 9 - 10)(11 - 12)$;
 е) $99(100 + 98) - 98(99 + 97) + 97(98 + 96) - 96(97 + 95) + \dots - 4(5 + 3) + 3(4 + 2) - 2(1 + 3)$.

Д6 При каком значении параметра a уравнение $2a - 5x = 3x + 2$ имеет корень $x = 1$?

4 Степень с натуральным показателем. Одночлены

4.1 Основные задачи

22 Что больше:

- | | | |
|--|----------------------------------|---|
| а) $2^5 + 2^5$ или 2^{10} ; | д) $3^5 \cdot 4^5$ или 12^5 ; | и) $2^{10} \cdot 4^{30}$ или 8^{40} ; |
| б) $3^2 \cdot 4^2$ или $(3 \cdot 4)^2$; | е) $4^5 - 3^5$ или $(4 - 3)^5$; | к) $7^{10} \cdot 7^{20}$ или 7^{30} ; |
| в) $3^2 + 4^2$ или $(3 + 4)^2$; | ж) $30^9 : 15^9$ или 2^9 ; | л) $2^{50} + 2^{50}$ или 2^{100} ; |
| г) $5^2 \cdot 3^4$ или 15^6 ; | з) $8^{19} : 4^9$ или 2^{10} ; | м) $4^{50} + 4^{50}$ или 4^{51} ? |

23 Найдите значения выражений:

- | | | |
|---------------------------|---|--|
| а) $(3^2 + (-2)^3)^3$; | е) $((-3)^2 - (-2)^3)^2$; | л) $1,2^2 - 0,2^2$; |
| б) $(-3^2 - (-2)^3)^3$; | ж) $0,1 + 0,2^4 + (-0,3)^4$; | м) $\frac{5^2}{2} - \left(-\frac{5}{2}\right)^2$; |
| в) $-(-3^2 - (-2)^3)^3$; | з) $(0,1 + 0,2)^4 - (-0,3)^4$; | н) $(5 \cdot 3 \cdot 2)^3 - 5 \cdot 3 \cdot 2^3$. |
| г) $(-3^2 - (-2)^3)^2$; | и) $0,1 - 0,2^4 - 0,3^4$. | |
| д) $-(-3^2 - (-2)^3)^2$; | к) $(3\frac{1}{3})^3 - (\frac{1}{3})^3$; | |

24 Запишите в виде степени с основанием 3 выражение $\frac{27^7 \cdot 9^7}{3^{13} \cdot 243}$.

25 Малыш строит башню из кубиков со стороной 1 см, в основании которой — квадрат со стороной s см. Каждый день малыш строит новый ярус башни — очередной слой из кубиков, выложенных в виде такого же квадрата. Представьте в виде одночлена количество кубиков

- а) которые малыш выкладывает за день, если $s = 6$;
 б) в башне высотой h см для произвольного s ;
 в) в N таких одинаковых башнях высотой 5 см со стороной основания s .

26 Упростите следующие выражения и найдите их значения при $a = -4$, $b = \frac{1}{2}$:

- а) $a^3b^6 : a^2b^2$; б) $(ab^2)^5$; в) $ab + 5ab - 8ab$; г) $\frac{(-a^6b^2)^{500}}{(a^3b)^{999}}$.

4.2 Дополнительные задачи

Д7 Перемножили 33 восьмёрки, 1 семёрку и 100 пятёрок. Найдите количество цифр и сумму цифр получившегося в результате числа.

Д8 Известно, что $8 + 8 + \dots + 8 = 4^{24}$. Сколько слагаемых в этой сумме?

Д9 Некто вычислил произведение двух одночленов, оно оказалось равно $48a^5b^2$. Потом он вычислил частное тех же одночленов, получилось $3a^3$.

а) Может ли так быть? б) Можно ли однозначно определить, что это за одночлены?

Д10 Сравните:

- а) 2^{300} и 3^{200} ; б) 2^{400} и 17^{100} ; в) 7^{100} и 17^{75} ; г) 2^{40} и 3^{28} .

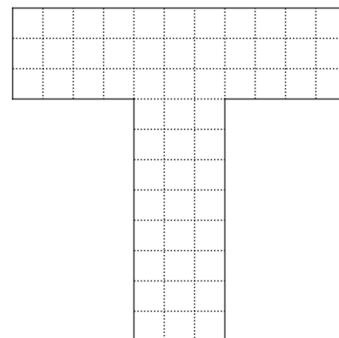
Д11 Известно, что $x^5y^3z^2 = -\frac{1}{3}$, а $2x^4y^7z = 4$. Найдите значение выражения $4,5x^{40}y^{47}z^{13}$.

Д12 Что больше: $2^{100} + 3^{100}$ или 4^{100} ?

5 Многочлены

27 Апельсины стоят a руб./кг, бананы b руб./кг, слива — c руб./кг. Запишите многочлен, выражающий стоимость покупки двух килограммов апельсинов, килограмма бананов и 600 г слив. Найдите стоимость покупки при $a = 183$, $b = 88$ и $c = 160$.

28 Запишите многочлен, выражающий количество клеточек в букве «Т», ширина и высота которой одинаковы и равны a клеточек, а толщина — b клеточек (например, на рисунке изображена такая буква «Т» для $a = 11$, $b = 3$).



29 При всех ли значениях a и b верны равенства:

- а) $5ab + ab = 5a^2b^2$; в) $ab - (a-1)(b-1) = -a - b + 1$;
 б) $a^2 - a(b+a) + ab = 0$; г) $ab - (a-1)(b-1) = a + b - 1$?

30 Раскройте скобки и приведите подобные слагаемые в выражениях

- а) $5ab + ab - 5a - b - (4a - b + 6ab)$; в) $(a - 3b)(2a - b)$;
 б) $0,5xy^2(3x - 0,2y) - 0,1x^2y(15y + y^2)$; г) $21 - (7 + c^3)(3 - c^4)$.

31 Решите уравнение: $(2x + 1)(x - 2) - x(2x - 1) = 0$.

32 Рассмотрим многочлен $P = A \cdot B$, равный произведению многочленов

$$A = x^4 + 4x^3 - 5 \text{ и } B = x^3 + 5x^2 - x + 8.$$

- а) Чему равна степень многочлена P ?
 б) Чему равно его значение при $x = 0$?

33 Разложите следующие многочлены на множители ненулевой степени так, чтобы дальнейшее разложение было невозможно:

- а) $16x^4y - 24x^3yz$; в) $2ab + 6ac - 5bd - 15cd$;
 б) $xy + 2x + 3y + 6$; г) $x^6 - x^5 - x^2 + x$.

34 Решите уравнения:

- а) $\left(\frac{5x}{2} - 5\right)\left(\frac{7x}{3} + 77\right) = 0$; в) $(x + 3)x = 5(x + 3)$;
 б) $13x^3 - 91x^2 = 0$; г) $2x^5 - 4 + 2x - 4x^4 = 0$.

35 Расставьте стрелочки $\Leftrightarrow, \Rightarrow, \Leftarrow$ между утверждениями про числа x и y :

$x + y = 6$, $xy + y^2 - 6y = 0$, $y(x + y) = 6y$, $(x + 2)(y + 2) = xy + 16$.

36 Есть две прямоугольные комнаты. Ширина первой на 3 м больше ширины второй комнаты, длина — на 3 м больше длины второй комнаты, а площадь — на 45 м^2 больше, чем площадь второй комнаты. Найдите периметр второй комнаты.

37 Положительные числа a, b, c таковы, что $a^3b^2c^7 + a^4bc^7 - a^3bc^8 = 0$. Докажите, что одно из чисел равно сумме двух других.

6 Формулы сокращённого умножения

6.1 Основные задачи

38 Раскройте скобки и представьте ответ в стандартном виде:

- | | |
|-----------------------------|--|
| а) $(7x + 3y)^2$; | е) $(2z - a)(4z^2 + 2az + a^2)$; |
| б) $(0,5x - 1)^2$; | ж) $(t + 7)(t^2 - 7t + 49)$; |
| в) $(12a + 5b)(5b - 12a)$; | з) $(a + b)^2 - (a - b)^2 - 4ab$; |
| г) $(a - b)^3$; | и) $(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)(x^4 + 1)(x^8 + 1) + 1$. |
| д) $(x + 2)^3$; | |

39 Вычислите с помощью формул сокращённого умножения:

- а) 2001^2 ; б) $(5 - \frac{1}{11})^2$ в) $101^2 - 99^2$; г) $48 \cdot 52$; д) $9,5 \cdot 10,5$.

40 Упростите выражение $(1 + xy)^2 - (1 - xy)^2$ и найдите его значение при $x = -8\frac{1}{3}$, $y = 12$.

41 Дополните суммы одним слагаемым так, чтобы полученные выражения стали полными квадратами. Сверните их и проверьте, раскрывая полные квадраты устно.

- | | | |
|-----------------|--------------------|------------------|
| а) $y^2 - 4y$; | в) $a^2 + 16x^2$; | д) $a^4 + b^4$; |
| б) $4a^2 + 9$; | г) $10yz + 1$; | е) $9 - 6x^2$. |

42 У Ани, Бори и Вити есть по одному картонному квадрату. Сторона Бориного квадрата на 3 см больше, чем сторона Витинового, и на 3 см меньше, чем сторона Аниного. Площади Аниного и Витинового квадратов отличаются на 60 см^2 . Найдите площадь Бориного квадрата.

43 Какие из следующих утверждений верны?

Не забудьте обосновать свой ответ!

- а) При всех значениях x, y верно равенство $(x - (x - y))(x + (x - y)) = x^2 - (x - y)^2$.
 б) При всех значениях a, b верно равенство $(a - b + 2)(a + b - 2) = a^2 - (b + 2)^2$.
 в) При всех значениях a верно равенство $(a + 1)^2 - (a - 1)^2 = 2$.
 г) При всех значениях a верно равенство $(a + 1)^2 \cdot (a - 1)^2 = (a^2 - 1)^2$.
 д) При всех значениях x верно равенство $-2x^2 + 12x + 18 = -2(x + 3)^2$.

44 Разложите следующие многочлены на множители так, чтобы дальнейшее разложение было невозможно:

- | | |
|-------------------------------|----------------------------------|
| а) $49 - b^2$; | г) $(x + 1)y + x^2 + 2x + 1$; |
| б) $2x^2 + 36x + 162$; | д) $(a + b)^2 - x^2$; |
| в) $3a^2b - 0,25a^4 - 9b^2$; | е) $4a - 4b - a^2 + 2ab - b^2$. |

45 Перемножим два целых числа, одно из которых на 2 больше другого, а к произведению прибавим 1. Докажите, что получится квадрат целого числа (*точный квадрат*). Например:

$$\begin{aligned} 3 \cdot 5 + 1 &= 16 = 4^2; \\ 5 \cdot 7 + 1 &= 36 = 6^2; \\ 23 \cdot 25 + 1 &= 576 = 24^2. \end{aligned}$$

46 Решите уравнения:

- | | |
|------------------------------------|-------------------------------|
| а) $(x - 9)^2 - (x + 9)^2 = 360$; | в) $x^2 - 9 = 0$; |
| б) $x^3 - 10x^2 + 25x = 0$; | г) $0,01x^2 + 0,6x + 9 = 0$. |

6.2 Дополнительные задачи

Д13 Заменим в произведении $100 \cdot 101 \cdot 102 \cdot \dots \cdot 200$ все числа на 150. Увеличится или уменьшится произведение? Тот же вопрос для аналогичной суммы.

Д14 Найдите наибольшее или наименьшее значения следующих многочленов:

а) $x^2 + 2x - 101$;

в) $-x^2 + 2x + 102$;

б) $4x^2 + 8x + 50$;

г*) $p^2 + 2pq + 2q^2 + 4q + 404$.

Д15 Квадрат 100×100 разрезали на четыре части: два квадрата и два равных прямоугольника. Какой может быть наименьшая суммарная площадь двух квадратов?

Д16 Аня и Ваня задумали по числу и сообщили их Сане. Саня посмотрел на числа и заметил, что квадрат разности этих чисел вдвое больше суммы их квадратов. Чему может быть равна разность квадратов Аниного и Ваниного чисел?

Д17 Для заданных значений чисел a и b докажите, что a нацело делится на b .

а) $a = 711^2 - 141^2$, $b = 570$;

в) $a = 41^3 + 31^3$, $b = 36$;

б) $a = 131^2 - 104^2$, $b = 45$;

г) $a = 2019^3 - 1919^3$, $b = 25$.

Д18 Докажите, что $n^3 - n$ делится на 6 при всех целых значениях n .

Д19 Разложите следующие выражения на множители:

а) $(x - 2)^2 - (2x - 7)^2$;

д) $a^3 + 8 + a^2 + 2a$;

б) $-x^3 - y^3$;

е) $(x + 1)^3 x^2 - x^3 - 3x^2 - 3x - 1$;

в) $p^3 + 27$;

г) $8q^3 - 1$;

ж) $y^2(x + 1) - x^3 - 1$.

Д20 Докажите тождество

$$(a^2 + 6a + 9)(a^3 - 6a^2 + 12a - 27)(a + 3) = (a^2 - 9)^3.$$

Д21 Из клетчатого квадрата вырезали клетчатый квадрат. Осталось 40 клеток. Какими могли быть размеры исходного и вырезанного квадратов?

Д22 Куб разрезали на 99 кубиков, из которых ровно у одного ребро имеет длину, отличную от 1 (у каждого из остальных ребро равно 1). Найдите объём исходного куба.

8 Системы линейных уравнений

8.1 Основные задачи

51 Автомат готовит кофе с молоком, смешивая молоко и кофе. Для получения желаемого напитка нужно ввести два числа: объём кофе и объём молока в миллилитрах. Автомат принимает значения от 0 до 250 мл молока и от 0 до 250 мл кофе. Отметьте на координатной плоскости точки, соответствующие заказам, которые:

- а) можно получить с помощью этого автомата;
- б) удовлетворяют Алёну, желающую любой напиток объёмом ровно 200 мл;
- в) удовлетворяют Борю, желающего напиток любого объёма, содержащий 75% кофе;
- г) удовлетворяют Вику, желающую, чтобы кофе было на 20 мл больше, чем молока;
- д) удовлетворяют и Алёну, и Борю;
- е) удовлетворяют и Алёну, и Вику;
- ж) удовлетворяют и Борю, и Вику;
- з) поместятся в стакан объёмом 200 мл.

52 Учитель предлагает ученику решить 16 задач, причём ученику будет засчитано по пять очков за каждую верно решённую задачу, а за каждую нерешённую задачу ученик потеряет три очка. Сколько задач решил ученик, если в результате у него 0 очков?

53 Решите системы уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} 3x + 5y = -9, \\ 2x - y = 7; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} -11x + 17y = 6, \\ 15x - 16y = -1; \end{cases} \quad \text{в) } \begin{cases} 2x + 4y = 16, \\ 3y = 12 - 1,5x; \end{cases} \quad \text{г) } \begin{cases} 9x - 6y = 21, \\ 10y = 15x + 13. \end{cases}$$

54 Без построения графиков найдите координаты общих точек двух прямых:

а) $y + 99 = 0$, $10x - 2y = 208$; б) $x + y = 40$, $x - y = 200$; в) $6x + y = 50$, $7x - y = 80$.

55 Один апельсин, два банана, три сливы и четыре дыни весят 10 кг 500 г. А четыре апельсина, три банана, две сливы и одна дыня весят 5 кг 500 г. Сколько весят апельсин, банан, слива и груша вместе?

8.2 Дополнительные задачи

Д26 Учитель постарался и автоматически сгенерировал 30 вариантов контрольной. В первой задаче в варианте с номером N он просит решить систему:

$$\begin{cases} Nx - 2y = 30 + 6N, \\ (N + 1)x - 2y = 36 + 6N. \end{cases}, \text{ то есть, например, в варианте №3: } \begin{cases} 3x - 2y = 48, \\ 4x - 2y = 54. \end{cases}$$

Докажите, что какие бы варианты ни достались Незнайке и его соседу-отличнику, Незнайка сможет успешно списать у отличника правильный ответ.

Д27 Велосипедист едет из А в В по дороге, содержащей подъёмы и спуски. Есть также ровные участки общей длины 28 км. На ровных участках его скорость равна 12 км/ч, на подъёмах — 8 км/ч, на спусках 15 км/ч. На дорогу из А в В велосипедист потратил 5 часов, а на обратный путь на 21 минуту меньше. Какова общая длина спусков по направлению из А в В? А подъёмов?

Д28 Существует ли такое трёхзначное число \overline{abc} , что разность $\overline{abc} - \overline{cba}$ является квадратом натурального числа?